INCORPORACION DEL ACADEMICO DON JOSE TOLA PASQUEL

(Sesión pública del 21 de abril de 1978)

LA MATEMATICA: LENGUAJE, ESTETICA Y SIGNIFICACION

Discurso de don José Tola Pasquel

Permítanme, señores Académicos, que sean mis primeras palabras de reconocimiento por haberme otorgado el honor de admitirme en su compañía y de participar en sus trabajos. Saben ustedes bien que no han sido mis habituales actividades las más propicias para el cultivo de nuestra lengua en aquello para lo que, sin duda, está mejor acomodada y en que luce más su genio y su riqueza. No puede, por consiguiente, justificarse mi presencia aquí, como ocurre con todos ustedes, porque haya demostrado en forma evidente tener merecimiento para pertenecer a esta Academia. No obstante, he calmado prontamente mis escrúpulos al hallar una razón suficiente para mi designación en vuestra reconocida sabiduría, que ha debido hallar motivos satisfactorios donde yo no he podido descubrirlos. Creo además, que mi caso no es del todo insólito, y que puede compararse, por lo menos en ciertos aspectos, con el de Losada y Puga, quien fue miembro de esta Academia y cuyo recuerdo me es grato rememorar en esta ocasión.

También fue la de él, sobre todo, una formación científica y técnica, Ingeniero y matemático, consagró gran parte de su vida a la enseñanza. Pero fue, además, un maestro en el justo sentido de la palabra: cuidadoso y pulido en la expresión, minucioso y claro en las explicaciones. Magnífica manifestación de su vocación docente ha sido, entre otras, su obra en tres volúmenes "Curso de Análisis Matemático", que no tuvo precedentes en nuestro medio y que aún hoy puede consultarse con provecho. Empleó su pluma, asimismo, con pulcritud y brillo, no sólo en otros libros que aportaron tanto a nuestra cultura, sino en muchos escritos en que expresó y defendió ideas sensatas en materia educativa. Como Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica, Ministro de Educación y Director de la Biblioteca Nacional, su competencia de educador y de organizador, unida a su cultura poco común, contribuyó de manera decisiva al renacimiento de los estudios técnicos y científicos de los años 30 y 40. Es justo, por eso, que al traer a la memoria de ustedes el recuerdo de quien fuera destacado maestro universitario, distinguido ingeniero e ilustre miembro de esta Academia, rinda un homenaje de admiración a su obra y de reconocimiento a sus enseñanzas.

Cuando, con su habitual cortesía, nuestro Director, el Dr. Aurelio Miró Quesada, me invitó a dirigirles la palabra el día de hoy, le expresé mis dudas de que fuera ésta la fecha más oportuna para hacerlo, pues mi discurso no podría versar sobre el idioma y las letras como pensaba yo que era de rigor en esta ocasión. Me respondió, con persuasivas razones, que no consideraba inapropiado que eligiera un tema cercano a mis inquietudes de siempre. Me propuse entonces, con ese permiso, hacerlo así; pero fijando límites severos a mi disertación. No debería, por una parte, fatigar con áridas disquisiciones técnicas a quienes deseo expresar mi agradecimiento; y por otra parte, debería evitar que, en

ese afán, cayera en excesiva banalidad. Es así como, sin alejarme demasiado del dominio que me es menos desconocido, he decidido tratar cuestiones que confío encontrarán ustedes de algún interés. Se referirá mi discurso a la Matemática, considerada como un fenómeno cultural *sui generis* y, especialmente, a su lenguaje, a su estéticá y a su significación. Las dudas que me asaltaron acerca de la elección del tema, que fueron en gran parte desvanecidas por las palabras de nuestro Director, desaparecieron, por último, al recordar el concepto en que tuvo a las matemáticas el propio don Miguel de Cervantes, quien no las olvidó cuando las puso en boca de Don Quijote, en la memorable ocasión en que enumeró los variados conocimientos que son esenciales para los caballeros andantes, con palabras que a continuación anoto como epígrafe de esta disertación acerca de:

LA MATEMATICA: LENGUAJE, ESTETICA Y SIGNIFICACION.

> (*El caballero andante*) *ha de saber las matemáticas porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad de ellas.*
>
> (Quijote, II, cap. XVIII).

Las ciencias, la Matemática en particular, si es que, como quieren muchos, debe incluirse entre ellas, emplean el lenguaje como su instrumento supremo. Y al decir lenguaje me refiero al lenguaje ordinario. Y debo dejar esto bien puesto en claro, porque al lado del lenguaje ordinario, que es el que se usa, casi sin excepción, en las exposiciones matemáticas, existe un lenguaje especial, estrictamente lógico, constituído por un pequeño número de "palabras" invariables que se enlazan entre sí con arreglo a una sintaxis compuesta de un corto número de reglas explícitas inviolables. Este lenguaje especial, o lenguaje lógico, conduce

a los llamados textos formalizados. En realidad, los matemáticos muy rara vez hacen uso de él en sus investigaciones y en la exposición de sus trabajos. Se contentan con hacer uso del lenguaje ordinario, introduciendo, ocasionalmente, denominiaciones convencionales, muchas veces simbólicas, para designar nuevos objetos; y llevan el detalle de sus razonamientos sólo hasta el punto en que su experiencia y su sensibilidad matemática, su *flair* de matemáticos, como ha dichos Bourbaki, les enseña que la traducción al lenguaje lógico no sería ya sino un ejercicio de paciencia, si bien, ciertamente, extraordinariamente penoso y largo. La idea de que el lenguaje lógico constituye solamente un recurso extremo, pero de ninguna manera un instrumento del trabajo creativo, ha sido expresada por el gran matemático contemporáneo André Weil: "Hemos aprendido —dice Weil— a hacer remontar toda nuestra ciencia a una única fuente, compuesta solamente de algunos signos y de algunas reglas para su empleo; es un reducto, sin duda inexpugnable, en el que no podríamos encerrarnos sin riesgo de padecer escasez, pero en el que siempre nos será posible replegarnos en caso de incertidumbre o de peligro externo" [1].

Podemos decir, por consiguiente, que el lenguaje, en el sentido ordinario, hace posible a la ciencia e influye en ella de manera decisiva. La ciencia no puede ir más allá de aquello que puede expresarse mediante el lenguaje. Acerca de la importancia que, en el caso particular de las matemáticas, tiene la apropiada elección del lenguaje, ha dicho Henri Poincaré: "Cuando el lenguaje ha sido bien escogido, es sorprendente contemplar cómo todas las demostraciones hechas para un objeto conocido se aplican inmediatamente a muchos objetos nuevos; no hay nada que cambiar, ni si-

1 *André Weil*, L'Avenir des mathématiques. (Les grands courants de la pensée mathematique, Cahiers du Sud (1958), pág. 309).

quiera las palabras porque los nombres vienen a ser los mismos" [2].

Y ha dicho Lagrange, que un matemático no alcanza a comprender totalmente su propia obra en tanto no sea capaz de exponerla en forma tan clara que pueda ser entendida fácilmente por el primer hombre que encuentre en la calle. Se trata, sin duda, de una afirmación que debe aceptarse con reservas; pero que, debido a quien la hizo, no puede ser dejada de lado sin más. Según esto, toda obra matemática puede ser expresada mediante el lenguaje corriente en forma perfectamente inteligible. Basta, sin embargo, examinar cualquier revista matemática especializada para reconocer hasta qué punto es necesario tomar esta aseveración con unos granos de sal.

Sin pretender profundizar más en las ideas expuestas, podemos concluir que el lenguaje influye de alguna manera esencial en las ciencias. No necesariamente debe deducirse de aquí que lenguas diferentes deban influir de distinta manera; aunque cabe presumirlo en el caso de lenguas que son totalmente disímiles. Es este un tema abierto a la investigación. Podemos observar, eso sí, que, en muchos casos, unas lenguas toman prestadas de otras palabras y aun giros de lenguaje que son más apropiados para expresar ciertos conceptos o ideas científicos.

Inversamente ¿Podría decirse también que la ciencia influye en alguna forma en la evolución del lenguaje? Es un lugar común que la ciencia y la tecnología caracterizan en gran parte a la cultura de nuestro tiempo. Si fuera cierto que en cada época el lenguaje es influído por las tendencias culturales contemporáneas, lo cual parece fuera de toda duda, no cabría negar que la ciencia y la técnica están influyendo actualmente en la evolución de las lenguas, particularmente de aquellas que están más sometidas a esa in-

2 *H. Poincaré,* Science et Méthode, Flammarion, pág. 31.

fluencia. Parece evidente, en efecto, que en el uso de hoy existen muchas palabras y formas de expresión que transparentan ideas y actitudes intelectuales derivadas directamente de esos factores culturales predominantes. No escapa el lenguaje, en cierta medida, a la influencia, de las matemáticas; las cuales, cada vez más, se hacen presentes en dominios extensos del conocimiento, que antes estuvieron alejados de ellas. De aquí que voces y expresiones de uso en las matemáticas o en ciencias afines, tiendan a emplearse en el lenguaje corriente; muchas veces, solamente de manera figurada y no con el sentido técnico preciso que se les atribuye con propósitos científicos.

Una razón poderosa para que la ciencia y la técnica influyan, no solamente en los más diversos aspectos de nuestra vida diaria, sino también en el lenguaje que empleamos, puede hallarse en la enorme cantidad y variedad de publicaciones dedicadas a temas científicos y técnicos, o que, de una o otra manera ,se ocupan de tales temas. La producción científica escrita es hoy gigantesca. Para referirme solamente a la matemática (y seguramente ésta, con ser muy grande, no es la más abundante), basta citar el caso de la revista matemática de mayor circulación en el mundo, *Mathematical Reviews*, que es una publicación bibliográfica de la Sociedad Matemática Americana. Publica esa revista, cada mes, un grueso fascículo que contiene breves reseñas de los trabajos de investigación matemática de interés que se publican en las revistas especializadas de todo el mundo, y de los libros sobre las mismas materias. Cada fascículo está dividido en un gran número de secciones, correspondientes a otros tantos dominios. Irving Kaplansky ha predicho [3] que el volumen de esa revista correspondiente al año 1984 contendrá 600 páginas dedicadas a reseñar

3 New Directions in Mathematics (editado por Robert W. Ritchie), Prentice-Hall, 1961, pág. 104.

los trabajos dedicados al álgebra; es decir más del doble del número de páginas de cada uno de los volúmenes que se publicaron en la década del 40. Observemos de paso hasta qué punto debe estar alejada esa álgebra de la que recuerdan quienes la conocieron únicamente en su época escolar. Puede deducirse de allí la enormidad de la producción matemática, del número de matemáticos investigadores y la influencia creciente que tiene la labor que realizan. No es tampoco sorprendente que haya matemáticos sensatos que están advirtiendo incansablemente acerca de la necesidad de detener esa manera creciente y de limitar a lo estrictamente indispensable las publicaciones relativas a nuevos hallazgos, evitando, en lo posible, todo lo superfluo.

Los temas sobre ciencia y técnica cobran cada vez más importancia y alcanzan a un público cada vez mayor. No puede dudarse, por eso, de que es absolutamente necesario evitar que, por esa vía, el lenguaje se corrompa o se empobrezca. Aparece así evidente una urgencia imperiosa de la educación de nuestra época que demanda que, paralelamente a la formación científica, sea incrementada y mejorada la formación humanística y, en particular, el estudio de la lengua en todos los niveles de la educación sin excepciones. Esa tarea ha sido ya emprendida entre nosotros y es de esperarse que siga intensificándose y perfeccionándose para atenuar los riesgos que he mencionado. Considero que tal cosa es posible, por cuanto pienso que no existe incompatibilidad entre la formación científica y la cultura humanística. Creo, por el contrario, que no es imposible que puedan ser ambas integradas. A este respecto es oportuno mencionar que la propiedad del lenguaje y el amor a la belleza de expresión son corrientes en los grandes científicos. No es necesario para ello que nos remontemos a los de las épocas clásicas. A los hombres de ciencia de tiempos recientes debemos hermosas páginas en que, al lado del más profundo pensamiento científico y filosófico, resplandecen

la belleza del estilo y la diafanidad de la expresión. Y es que no debe desconocerse que no limitaron su interés exclusivamente a los dominios de su especialidad, como se suele creer. Esta creencia es frecuente en lo que respecta a los matemáticos, a quienes el prejuicio vulgar atribuye la fama de estar siempre sumergidos en sus especulaciones, incapaces de comunicarse con el resto del mundo y enteramente ajenos a la realidad. No es, en general, sino una leyenda. La verdad es, casi siempre, muy diferente; pero no intentaré probar ahora esta afirmación. Se ha dicho de ellos cosas no siempre ciertas pero, algunas veces, de manera aguda e ingeniosa que ha contribuído a arraigar la leyenda. Así, para recordar únicamente un ejemplo célebre, el implacable satírico Jonathan Swift les ha dedicado unas páginas que traigo con gusto al recuerdo de ustedes, porque su crítica influyó en su tiempo y quizás influye aún en nuestra época. Se trata de una sátira acerca de los matemáticos y de los músicos y, ciertamente, no fue intención de Swift incluirlos a todos sin excepción, si se recuerda que Newton y Händel fueron contemporáneos que no podía incluir en su comentario. Cuenta [4] acerca de una isla habitada por hombres cuyas ocupaciones principales son la matemática y la música. "Parece, dice Swift, que las mentes de estas gentes están tan absorbidas por intensas especulaciones que no pueden hablar ni escuchar los discursos de los demás sin ser despertados por algún contacto externo de los órganos de la palabra y del oído. Por esta razón, quienes pueden procurárselo, mantienen siempre a su servicio, entre los domésticos de su familia, a un criado alertador; y no salen ni hacen visitas sin su compañía". El alertador lleva en la mano una varilla que en su extremo sostiene una vejiga llena de piedrecillas. "La obligación de ese criado, cuando dos o más personas están reunidas, es tocar suavemente

4 *J. Swift*, Gulliver's Travels. 3a. parte, cap. II.

con la vejiga la boca de quien debe hablar y la oreja derecha de aquel o aquellos a quienes se dirige el que habla. El alertador es empleado también activamente en acompañar a su amo en sus paseos, por cuanto es necesario darle un leve golpe en los ojos, ya que está siempre tan sumido en la meditación que se halla en peligro manifiesto de caer en cada precipicio y de golpearse la cabeza en cada poste; y en las calles, de tropezar con los demás o de caer en cada arroyo". Todas las actividades de estas gentes están dominadas por las matemáticas y la música. Sus ideas, sin excepción, aun las alabanzas de la belleza de una mujer, son expresadas con el único lenguaje que conocen, que es el de esas disciplinas.

Pero muestran una extraordinaria incompetencia en todo lo que es práctico y útil. "Sus casas mal construídas, las paredes inclinadas; y este defecto se debe al desprecio en que tienen a la geometría práctica, que consideran vulgar y mecánica, y a las instrucciones que dan, que son demasiado refinadas para las inteligencias de sus trabajadores, lo cual da lugar a perpetuos errores". "Aunque son diestros, en el papel, para el manejo de la regla, el lápiz y el compás, en los actos comunes y en la conducta diaria no hay gente más torpe, zafia y desmañada, ni nadie tan lento e indeciso en sus concepciones acerca de todos los asuntos, excepto las matemáticas y la música". "Son enteramente extraños a la imaginación, la fantasía y la invención: ni siquiera tienen en su lenguaje palabras para expresar sus ideas; todo el campo de su pensamiento y de su mente se encierra dentro de las ciencias mencionadas". Y así prosigue Swift, extendiéndose con sumo detalle, para no dejar sombra alguna de duda acerca del concepto que le merecían músicos y matemáticos.

La pintura de Swift es, claro está, una caricatura; como tal contiene, por consiguiente, algo de verdadero. No puede negarse que la extrema concentración que, en mu-

chos casos, exigen la investigación y el estudio de las matemáticas o la creación musical, puede dar origen a apariencias algunas veces vecinas de las que describe Swift. Pero el mal, cuando existe, debe ser atribuído a una deformación de la mente, propia de la excesiva especialización, antes que a una influencia perniciosa de esas disciplinas.

En verdad, como lo prueban innumerables ejemplos, y creo que ocurre en la generalidad de los casos, el auténtico interés por las matemáticas está acompañado por otras muchas inquietudes intelectuales. Así, es corriente hallar matemáticos profundamente interesados en las ciencias naturales, las ciencias sociales, la lingüística y la música. Y pueden mencionarse no pocos ejemplos célebres en que esa variada vocación ha producido genios insuperables como han sido Arquímedes, Newton, Leibniz, Gauss, Poincaré y Hilbert, para no mencionar sino a algunos matemáticos que son representativos del conocimiento universal. Y no solo eso: el trabajo matemático, la tarea creativa en particular, está alentada no únicamente por una aspiración al conocimiento puro o utilitario; aunque quizás es menos sabido, se suman a esos motivos otros de orden estético, no menos importantes, a los que me referiré después con más detalle, y que, a juicio de la mayoría de los matemáticos, forman parte esencial y predominante de la vocación matemática.

La severa crítica de Swift no constituye un caso aislado. Ha habido muchos otros. Unas veces, como ocurrió en el caso de Berkeley, la crítica adquirió profundidad filosófica, aun cuando su legitimidad científica pueda ser puesta hoy en tela de juicio. Otras veces se han emitido opiniones breves y lapidarias, como aquella frase de Georg Cristoph Lichtenberg: "La matemática es una ciencia magnífica, pero a menudo los matemáticos no la entienden".

Hoy mismo se alzan muchas voces de reproche a los matemáticos, si bien no siempre con gracia y buen humor; y no es raro que se trate simplemente de un rechazo cie-

go de aquello que no se alcanza a comprender y a lo que se atribuye una influencia vagamente perniciosa. Sin contar con los que deducen su rechazo a cierta clase de matemáticos y de investigaciones matemáticas, de razones ideológicas, que no es del caso comentar ahora.

Pero volvamos nuevamente a la cuestión del lenguaje. Su uso en las matemáticas tiene algunas peculiaridades que merece la pena observar. En primer lugar, la demanda del ordenamiento lógico y del rigor del método deductivo imponen limitaciones drásticas al afán estético, casi siempre presente, que se esfuerza por hacer resaltar la belleza de las partes y la armonía del conjunto de cada teoría. Es por eso que las exposiciones matemáticas, en especial los textos sistemáticos, pueden ser afectados por una insistente repetición de palabras y giros, imposible, a veces, de evitar. A lo cual hay que agregar que la total comprensión, que es requisito indispensable para la plena apreciación estética de las teorías y para su eficaz aprovechamiento con fines de utilidad práctica, requiere el conocimiento circunstanciado de definiciones y demostraciones, cuyas exigencias técnicas demandan de ordinario un grado de complejidad y de abstracción que dificulta aún más la apreciación. Algo así, como que, si para captar la belleza de una obra arquitectónica, con la cual se compara algunas veces la de las teorías matemáticas, fuera indispensable, no solamente presenciar ,sino aun compartir las fatigas de los constructores desde que se coloca la primera piedra hasta que, retirados los últimos andamiajes, se fija y asegura el último elemento decorativo. Sin embargo, cuanto más elevado el nivel de una exposición y más alta la competencia matemática del autor y de los lectores a quienes está dirigida, más en evidencia destaca su valor estético y mejor ocultos o disimulados quedan los recursos técnicos, hasta el punto de que, en ocasiones, los resultados parecen surgir de manera sorprendente sin que sea posible adivinar por qué vía miste-

riosa el autor halló los caminos para alcanzarlos; y aumentan también, entonces, considerablemente, los obstáculos técnicos que se oponen a la comprensión y a la apreciación. Carl Stoermer ha precisado de manera simple estas ideas comparando a las matemáticas con la literatura. Según él, las matemáticas qué se estudian en la escuela primaria corresponden al alfabeto; las de la escuela secundaria corresponden a la composición de pequeñas frases; la de los estudios básicos de la Universidad, a pequeños cuentos; y sólo los trabajos propios de profesionales y especialistas coresponden a la literatura propiamente dicha. De esa manera ocurriría que la belleza de las matemáticas, en su forma más elevada, estaría reservada exclusivamente para quienes logran superar las grandes dificultades del aprendizaje. No obstante, es sabido que puede también ser percibida sin necesidad de alcanzar ese alto grado de especialización. En efecto, el caudal de logros matemáticos que no requieren esa extremada competencia técnica para ser comprendidos, y que muestran aspectos de sumo valor estético, en el sentido en que lo entiende el matemático, es muy considerable; y hay muchos libros excelentes en que son expuestos esos temas en términos que están al alcance de un amplio público.

No es tarea fácil la de explicar con precisión en qué consiste la belleza de las teorías matemáticas. Lo usual es comparar las impresiones que suscitan con las que provienen de manifestacionse artísticas que son más familiares; pero esas similitudes no alcanzan a dar sino una idea aproximada. Lo cierto del caso es que se trata de una emoción estética peculiar, cuya verdadera naturaleza únicamente puede ser percibida por la experiencia personal. El valor estético de una teoría matemática no tiene su origen ciertamente en la forma de su expresión verbal, por lo menos en el sentido en que ordinariamente se entiende la belleza del lenguaje. Se origina más bien en los objetos descritos o

sugeridos, en sus sorprendentes y complejas propiedades, en las admirables relaciones que vinculan de pronto, de manera misteriosa e imprevista, casi milagrosa, a objetos, ideas y aun enteras teorías que parecen no tener parentesco alguno. Se pone así de manifiesto un ordenamiento supremo que, en ocasiones, sobrecoge de admiración, invita a la contemplación y a la búsqueda de nuevas perspectivas secretas; y aún, en algunos casos, provoca reacciones de fervor casi religioso. Todo eso sin contar el hecho, no menos sorprendente, de que, en muchos aspectos, la naturaleza se comporta como si estuviera regida por leyes que sólo alcanzamos a atisbar mediante las ideas y los métodos que las matemáticas ponen a nuestro alcance. Se agrega de esta manera al sentimiento estético una impresión de armonía y coherencia que sugiere, que transparenta la presencia de fuerza y de grandeza casi sobrehumanas.

La expresión verbal puede o no ser eficaz para poner en evidencia todas esas impresiones, para destacar los más hermosos detalles y la belleza del conjunto. Para lograrlo no basta solamente el profundo conocimiento del asunto; es necesario, además, el empleo adecuado de los medios de expresión, es decir del lenguaje. Es verdad que los conceptos y las teorías matemáticas poseen una belleza intrínseca; pero no está en manos de todos descubrirla y ponerla en evidencia. La intuición de esa belleza constituye uno de los instrumentos más eficaces para encontrar nuevos y ricos hallazgos. Los más grandes matemáticos, es decir los grandes descubridores, son también, seguramente, los más sensibles a ella y los mejor dotados para descubrirla de la manera más elegante, que es la que conduce a resultados de la mayor profundidad mediante los razonamientos más concisos, penetrantes y originales, haciendo uso del menor número de recursos. Weierstrass, uno de los más célebres matemáticos del siglo pasado, fundador de una poderosa corriente de pensamiento que ha influído de manera defi-

nitiva en la matemática de nuestros días, ha expresado esa idea cuando dijo que "un matemático que no tenga también algo de poeta jamás será un completo matemático".

Salvo declaraciones y comentarios más o menos retóricos y líricos o comparaciones que son siempre insuficientes, poco o nada puede decirse que explique con exactitud en qué consiste toda esa maravilla; nada que no requiera entrar previamente en el santuario, previo el pago de un cuantioso tributo de esfuerzo intelectual, de imaginación y de abstracción. El sentimiento estético que despiertan las matemáticas es, sin embargo, un hecho universalmente aceptado, que se manifiesta con apariencias semejantes a las que son bien evidentes y conocidas en las artes clásicas. De aquí, que consideren algunos que la matemática es también un arte.

Cabe mencionar, por lo menos, un intento serio de tratar a las matemáticas como el objeto de un arte —el arte matemático— y por consiguiente como el tema de una estética —la estética matemática—. François Le Lionnais [5] ha reconocido en las matemáticas dos grandes tendencias, dos corrientes estéticas; la clásica y la romántica. Lo característico de la primera es la elegante sobriedad; en la segunda, es la complacencia en los efectos cautivantes, que tratan de llegar al paroxismo. Se dice que una proposición matemática posee una belleza clásica cuando nos impresiona sea por su simplicidad, sea por su complejidad perfectamente dominada; o bien, porque une a ambas impresiones en una construcción armoniosamente lograda. Le Lionnais asocia con estos conceptos la rígida simplicidad del orden dórico y la deliciosa esbeltez del orden jónico. El clasicismo ha sido celebrado por Edgar Quinet en estos

5 *François Le Lionnais,* La beauté en mathématiques. (Les grands courants de la pensée mathématique, Cahiers du Sud (1958), pág. 438).

términos: "Me ha impresionado el arte con que los matemáticos alejan, rechazan, eliminan poco a poco todo lo superfluo, para expresar lo absoluto con el menor número posible de términos, conservando siempre en el arreglo de esos términos una selección, un paralelismo, una simetría que parecen ser la elegancia y la belleza visibles de una idea eterna". Las proposiciones cuya belleza puede llamarse romántica despiertan, por el contrario, impresiones violentas que se deben a su apariencia imprevista y, a veces, extravagante. Pierre Boutroux ha expresado su admiración por la actitud romántica con las siguientes frases: "Lo que nos admira ante todo, cuando comparamos la matemática de nuestro tiempo con la de épocas anteriores, es la extraordinaria diversidad y el aspecto imprevisto de las vías y de los desvíos en que esta ciencia ha incursionado; es el desorden aparente con que ejecuta sus marchas y contramarchas; son sus continuadas maniobras y cambios de frente".

No sabría avanzar más en el pensamiento de Le Lionnais sin redundar en analogías y metáforas, o bien sin tener que referirme a ejemplos concretos para ilustrar esas dos grandes tendencias, lo cual está lejos de mi intención. Me limitaré pues con lo dicho hasta ahora acerca de ese punto.

Y para terminar con estas breves consideraciones respecto de la belleza en las matemáticas citaré a Carl Friedrich Weizäcker, el ilustre físico y filósofo, presidente del Instituto Max Planck para la investigación de las condiciones vitales en el mundo científico, quien, en un reciente artículo [6] sobre "Lo bello", resume así su pensamiento: "La belleza es una forma de la verdad". Es posible que en esta breve aseveración pueda hallarse una razón profunda de la belleza que unánimemente es reconocida en las ideas y en las teorías matemáticas.

El vocabulario que requiere las matemáticas es muy

6 Universitas, vol. XIII, (1976), Nº 4, pág. 301.

extenso. No obstante, los matemáticos rehusan, en general, emplear voces nuevas. De ordinario emplean palabras de uso en el lenguaje corriente, con la circunstancia peculiar de que, aferrados tenazmente a las palabras de su viejo léxico, se limitan a modificar convencionalmente su significación según sea necesario. Ocurre con frecuencia, por ese motivo, que una misma palabra tiene, para autores distintos, significados diferentes, lo cual demanda muchas veces un cuidado extremo en la interpretación de los textos. No se trata simplemente de capricho o de inercia, sino de una necesidad impuesta por la naturaleza de esta ciencia, en la cual la modificación del significado de una palabra puede determinar una enorme economía de esfuerzo y, en muchos casos, hace posible extender de manera sustancial la generalidad y la profundidad de los resultados. Ocurre en muchas ocasiones que, luego de un proceso de selección entre las diversas significaciones que se ha atribuído a una palabra, se llega finalmente a un consenso y se consagra el uso de una acepción. "De vez en cuando, dicen Kasner y Newman [7], hay limpieza en casa de las matemáticas. Algunos viejos nombres son descartados, otros son desempolvados y acicalados; nuevas teorías, nuevas adiciones al menaje reciben sitio y nombre. Con seguridad, hay tantas palabras en las matemáticas como en otros dominios científicos. En realidad hay tantas que resulta más fácil aún de lo que era antes, hablar mucho y no decir nada".

Las palabras técnicas, cuya signficación puede considerarse definitivamente establecida, son, en su mayor parte, de empleo exclusivamente reservado a dominios muy especiales. Son por tanto palabras que no pueden situarse entre aquellas que han pasado "de la nomenclatura especializada al lenguaje culto general e incluso al dominio común", como

7 *Kasner y Newman*, Mathematics and imagination, Simon and Schuster, (1940), pág. 4.

las que es lícito incorporar al Diccionario de la Lengua Española. Su lugar propio es por tanto un Diccionario Matemático. Hasta donde llega mi información no existe tal diccionario en la lengua castellana. Sí los hay, en cambio, en otros idiomas [8]. Las palabras con significación matemática que usamos en español son, en general, traducción o castellanización de las que se emplean en otras lenguas y es frecuente que la versión cambie según los autores. De allí proceden otras discrepancias en el lengaje.

Una particularidad curiosa del empleo del lenguaje en las matemáticas es el uso frecuente del llamado "abuso del lenguaje". Consiste en dar a una palabra o símbolo más de una significación simultáneamente. Desde luego, este procedimiento no se emplea de manera indiscriminada. Se requieren algunas condiciones esenciales: el convenio debe ser aceptado de manera explícita; las diferentes acepciones deben guardar estrecha relación y su exacta significación debe resultar, en cada caso, del contexto, sin dar lugar a confusiones. Generalmente, la doble acepción está consagrada por un largo uso y se prefiere mantenerla por razones de simplicidad y de estética. El abuso del lenguaje reviste a veces otras formas interesantes que no me detendré ahora a describir.

En las ciencias naturales y físicas el vocabulario es considerablemente más especial que en las matemáticas.

---

8 Pueden citarse los siguientes:

Naas, J.; Schmid, H. L.: Mathematiques Wörterbuch, I, II, Stuttgart, 1962.

James, G.; James R. C.: Mathematics Dictionary, New York-Toronto-London, 1959.

Behnke, H.; Remmert, R.; Steiner, H. G.; Tietz, H.: Mathematik I. Das Fischer — Lexicon, Frankfurt a. M. 1964.

Karush, W.: The Crecent Dictionary of Mathematics, New York-London. 1962.

Meschkowski, H.: Mathematisches Begriffswörterbuch, Bibliographisches Institut Mannheim, 1965.

Particularmente llamativo resulta ser el caso de la química en que, para identificar racionalmente a los innumerables compuestos orgánicos, ha sido necesario idear una nomenclatura que no puede ser empleada sino en forma estricta. Nadie en su sano juicio llamaría al azúcar común, por ejemplo, con su nombre [9] que consta de diez sílabas. Algo semejante ocurre en el caso de la biología. En matemáticas, en cambio, como ya dije, se usan palabras sencillas y de uso diario: conjunto, grupo, familia, anillo, campo, curva simple, función, forma, módulo categoría etc. Pero, eso sí, estas palabras reciben una significación absolutamente precisa, que no puede ser modificada en el curso de un mismo razonamiento sin conducir a resultados errados. Se ha dicho por esa razón que la matemática es la ciencia que emplea palabras fáciles para expresar ideas difíciles. Es decir, justamente lo contrario de lo que polría decirse de otras ciencias, particularmente de algunas que se hallan recién en la primera fase de su formación.

El sentido preciso que el matemático atribuye a las palabras que emplea, no proviene del capricho o de la pedantería; procede de una necesidad ineludible. Sin un rigor absoluto en las definiciones sería imposible alcanzar el grado de perfección lógica exigido por el razonamiento matemático. Sin embargo, esta exigencia no debe dominar hasta el punto de convertir al lenguaje matemático en una monstruosa jerigonza. El afán lógico no debe exceder los límites del buen sentido y de un sometimiento razonable a las exigencias técnicas. La pretensión de dar al pensamiento matemático una expresión lógicamente perfecta, sin el empleo de los textos formalizados a que antes me he referido, cae prontamente en contradicción con la urgente aspiración estética que nunca abandona al matemático. De manera

9 La sacarina que es la sustancia que constituye al azúcar común se denomina ácido O-anhidrosulfaminobenzoico.

ciertamente exagerada, pero que ilustra bien esas ideas, John George Kemeny [10], destacado matemático y lógico, ha mostrado con un ejemplo a qué extremo de aberración en el lenguaje podría llegar quien se empeñara en el error de sólo cuidar los aspectos técnicos y lógicos sin preocuparse de la claridad y de la estética. Da con ese fín una definición rigurosamente exacta del concepto de función, cuyo sentido no pido a ustedes que traten de desentrañar, y que dice así: "Una función es un conjunto de conjuntos, de conjuntos, tal que cada uno de sus elementos es un conjunto de dos elementos que consiste en un conjunto de un elemento y un conjunto de dos elementos, y en el que el conjunto de un elemento es un subconjunto del conjunto de dos elementos. Además, para cada objeto, el conjunto formado por él sólo es, a lo más, elemento de uno de los elementos de la función" [11]. Si bien, en verdad, este es, efectivamente, el sentido preciso que los matemáticos atribuyen a la palabra función no cabe pensar en introducir noción tan importante y tan simple mediante un lenguaje tan inapropiado, en que se ha llevado al extremo el énfasis excesivo y el innecesario rigor lógico. Por suerte, hay maneras razonables de definir la misma noción con una corrección equivalente y sin recurrir a formas tan alambicadas, Señalaré de paso que la definición que aparece en el Diccionario de la Lengua: "función es una cantidad cuyo valor depende del de otra u otras cantidades variables", no coincide con la hoy aceptada en las matemáticas y podría considerarse como una descripción aproximada de lo que se llama más bien función numérica. Al hacer esta observación no es mi intención, de manera alguna, sostener que esa definición deba ser modificada, porque creo que se acomoda bien

10 Citado por *J. Fang*, Bourbaki, Paideia Press, 1970, 129.

11 Si los objetos se designan a, b, c, etc. los elementos de la función tienen formas tales como ([a], [a, b]), en que, entre llaves, se encierra a los elementos de un conjunto.

a la interpretación que se da a la palabra función en el uso corriente. Volviendo a mi tema, insistiré solamente en el hecho de que, ordinariamente, el matemático prefiere sacrificar la inflexibilidad de la forma estrictamente lógica a la sencillez y a las conveniencias estéticas; esto, bien entendido, siempre que, por último, no se afecte en forma alguna a las exigencias del más severo rigor.

La mente del hombre parece ser impulsada de manera irresistible a pensar matemáticamente y es estimulada por las razones estéticas a que me he estado refiriendo. Sin embargo, ese estímulo, con ser poderoso, no explica satisfactoriamente el esfuerzo ininterrumpido realizado por el hombre para ampliar el campo del conocimiento matemático. Para hallarle justificación es necesario recurrir al análisis del papel que el pensamiento matemático ha desempeñado en la historia de la cultura, papel que no puede pasar desapercibido al observador más superficial. Baste recordar el lugar preferente que, por muchos siglos, han ocupado las matemáticas en la educación de los hombres y su creciente participación en el desarrollo de los más diversos dominios del saber. No pretendo afirmar que las ideas matemáticas hayan ejercido una acción decisiva en el desarrollo cultural de la humanidad, lo que ciertamente sería exagerado. A este respecto Whitehead [12] ha emitido un jucio que me parece justo: "No iría tan lejos —afirma Whitehead— como para decir que construir una historia del pensamiento, sin un estudio profundo de las ideas matemáticas en las sucesivas épocas, sería como omitir a Hamlet de la tragedia que lleva su nombre. Pero sería ciertamente semejante a suprimir la parte de Ofelia. Este símil es singularmente exacto porque Ofelia es esencial para la tragedia, es encantadora y un poco loca. Debemos

12 *Alfred North Whitehead,* Science and the Modern World, cap. II.

aceptar que el empeño de las matemáticas es una divina locura del espíritu humano y un refugio contra la urgencia apremiante de los acontecimientos casuales".

Sin detenerme a examinar con más detalle por qué vías el pensamiento matemático ha impreso su huella en la evolución de la cultura y ha modificado de manera profunda nuestra concepción del universo y nuestra interpretación de los fenómenos naturales, quisiera decir unas pocas palabras acerca de los móviles que, desde remotos tiempos, han inducido al hombre a razonar matemáticamente. Fueron, al principio de la historia, intereses muy prácticos: la medida de las tierras y de las pertenencias; y luego la observación del cielo y del movimiento de los astros, en función de la medida del tiempo, de las necesidades agrícolas y de las predicciones astrológicas. Los descubrimientos matemáticos de los tiempos antiguos, y aun de épocas no tan remotas, fueron tan sorprendentes y parecieron tan maravillosos, que se les atribuyó una significación religiosa y mística que ha perdurado casi hasta nuestros días. Expresión de ese sentimiento ha sido, para no citar sino un ejemplo típico, la forma en que han sido considerados los llamados números imaginarios. Sospechada su existencia en tiempos antiguos, fueron empleados durante el Renacimiento de manera puramente formal, mucho antes de que se llegara a descubrir su verdadera significación. Fue posible reconocer desde entonces, a pesar de que los motivos permanecían desconocidos, que su empleo introduce un orden sorprendente en donde había hasta entonces un aparente caos. Sin que se hubiera elaborado para ellos una teoría racional, sin embargo, su uso permitió acumular un conjunto de resultados que llenaban de admiración por su variedad y sencillez. Muy lentamente comenzó a vislumbrarse la posibilidad de construir una teoría enteramente satisfactoria y totalmente desprovista de misterios. Por fín, sólo se alcanzó la meta deseada a principios del siglo pasado, al

comienzo de la época de oro de las matemáticas; y se debió ese gran triunfo a Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los más grandes genios matemáticos de todos los tiempos. Al definir de manera rigurosa a los números imaginarios y establecer en consecuencia sus propiedades, despejó todas las dudas, explicó todas las conquistas logradas hasta entonces con recursos exclusivamente algorítmicos y fundó, sobre firmes bases, un nuevo gran capítulo de la matemática: la teoría de las funciones de variable compleja. A pesar de esa larga historia y de su sensacional desenlace, existían, avanzado el presente siglo, no pocos textos matemáticos cuyos autores desconocían la naturaleza racional de los números imaginarios y sostenían aún una vaga concepción esotérica. Ocurría esto cuando desde hacía ya un siglo los matemáticos habían reconocido la naturaleza auténticamente numérica de los números imaginarios, dentro de una concepción perfectamente rigurosa de la noción de número.

El caso que he mencionado es uno, entre muchos, en que la tendencia a interpretar de una manera no racional, o mediante consideraciones metafísicas, los descubrimientos matemáticos, ha obstaculizado la difusión de los conocimientos científicos, que sólo han llegado a imponerse con extraordinaria lentitud y venciendo una enorme resistencia.

En forma diversa, pero no menos sorprendente, ha ocurrido algo, hasta cierto punto semejante, con otra cuestión célebre: se trata del famoso problema de la cuadratura del círculo, cuyo enunciado y los esfuezos por resolverlo se remontan a la antigüedad clásica. Consiste, según es bien sabido, en buscar un procedimiento mediante el cual, dado un círculo, pueda trazarse un cuadrado cuya área sea *exactamente* igual a la del círculo dado; pero empleando, para llevar a cabo la construcción, *exclusivamente*, una regla y un compás. Este problema quedó "resuelto" en forma definitiva en el año 1882, cuando Fernando Lindemann probó, en forma que no deja lugar a dudas, que el problema es

irresoluble, es decir que ese procedimiento no existe y, por tanto, que la construcción de un cuadrado que cumpla las condiciones del problema es imposible mediante el uso de la regla y el compás. No obstante, ha habido desde entonces, y hay aún, quienes se empeñan todavía en lograr obtener el procedimiento de construcción y algunos que creen firmemente haberlo hallado. Se trata, ordinariamente, de personas que no han captado el verdadero enunciado del problema o a cuya noticia no ha llegado la demostración de Lindemann. La dificultad mayor parecería residir aquí en la dificultad para entender que pueda demostrarse rigurosamente que un problema puede no tener solución.

El problema de la cuadratura del círculo trae a la memoria el hecho, digno de mención, de que la matemática, más quizás que otros dominios de la ciencia, despierta ocasionalmente, en los profanos, sentimientos opuestos. En unos ejerce una irresistible atracción, que algunas veces los induce a dedicar un considerable e inútil esfuerzo por lograr metas inalcanzables; y en otros, despierta desconfianza y aun repulsión. Muy lejos de los sabios comentarios de Berkeley o de la ingeniosa sátira de Swift, se ha expresado alguna vez el oscuro temor de que las incomprensibles elucubraciones de los matemáticos puedan ocultar alguna intención nefasta o abominable; o bien se ha hecho mofa de la necesidad lógica de las proposiciones matemáticas. Un miembro del Comité de Instrucción Pública durante la Revolución Francesa, el convencional Louis Sebastien Mercier, reprochaba la insistencia incansable con que algunos destacados matemáticos de la época se empeñaban en impulsar la adopción del sistema métrico decimal en reemplazo del caótico sistema de pesas y medidas hasta entonces imperante. "Creo en mi alma y en mi conciencia, decía, que todo ello es charlatanería, y que lo ridículo de esta enorme y costosa operación será confesado y reconocido"; y agre-

gaba: "Temo que los matemáticos, que aún no han trastornado el mundo, lleguen por fín a trastornarlo"[13].

Pero la desconfianza en los matemáticos y el desconocimiento de la validez de los resultados matemáticos ha llegado a extremos pintorescos, casi grotescos. Cuenta Clifton Fadiman [14] que en 1899 el Cuergo Legislativo del Estado de Indiana estuvo a punto de aprobar una ley por la cual debía enseñarse en todas las escuelas del estado que el número *pi* es igual a 4. Sin duda no había llegado a conocimiento de esos legisladores la definición de la matemática que en 1870 había dado el norteamericano Benjamín Peirce: "La matemática es la ciencia que llega a conclusiones necesarias". Y tocamos aquí otro tema que aporta nuevos motivos de sorpresa cuando se medita sobre la significación cultural de las matemáticas. Es un hecho, que no existe una definición de la matemática que sea generalmente aceptada sin reservas. Parecería, además, que no hay, de parte de los matemáticos, una seria inquietud por llegar a una definición que sea enteramente satisfactoria; y que preferirían, más bien, dejar siempre abierta la cuestión, ya que la historia demuestra que su campo de interés se amplía más y más, al parecer sin fin. En cambio, se ha dado de ella un gran número de breves descripciones que, si bien son técnicamente insostenibles, tienen, algunas de ellas, el mérito de impresionar vivamente la imaginación. Algunas son paradójicas o discretamente humorísticas. Las hay anónimas como aquella que la define como la "ciencia del sentido común". Otras se deben a matemáticos ilustres. Bertrand Russell ha dicho que "la matemática es una ciencia en que no se sabe jamás de qué se habla ni si es verdadero lo que se dice". Es claro que su intención era poner en

---

13 Citado por *Joseph Fayet*, La Révolution française et la Science. Librairie Marcel Riviere et Cie (1960) pág. 466.

14 Fantasia Mathematica, Simon and Schuster (1958) pág. XVIII.

evidencia el rol que cumplen en las matemáticas las definiciones en apariencia arbitrarias. Dentro de este mismo espíritu, Peirce, profesor en la Universidad de Harvard al que que ya me he referido, después de explicar un célebre hallazgo de Moivre, terminó declarando dramáticamente a sus oyentes: "Caballeros, esto es cierto con seguridad. Es absolutamente paradójico, no podemos entenderlo, y no sabemos qué significa; pero lo hemos demostrado y por tanto sabemos que es cierto".

A la citada afirmación de Russell, Emile Borel, un matemático no menos autorizado, ha opuesto otra: "La matemática es la ciencia en que se sabe siempre de qué se habla y en que se está siempre seguro de que lo que se dice es verdad". Para Henri Poincaré es "el arte de dar el mismo nombre a cosas diferentes".

Podrían citarse muchos otros comentarios penetrantes que, sin constituir una definición, arrojan luz sobre la manera como los matemáticos entienden la matemática. Sólo mencionaré un ejemplo más. Georg Cantor, el célebre creador de la teoría de los conjuntos y de la noción de número transfinito, ha expresado una idea que ha sido objeto de muchas interpretaciones y tergiversaciones: "La matemática —ha dicho— es, con preferencia, libre en su desarrollo y está sujeta únicamente a la consideración obvia de que sus conceptos deben estar libres de contradicciones en sí mismos y relacionados precisa y sistemáticamente, mediante definiciones, con nociones previamente existentes y establecidas". Esta frase ha sido simplificada, alguna vez, hasta el punto de resumirla diciendo: "La matemática, en esencia, es libertad".

Jean Kuntzmann [15], en época reciente, la define como "la ciencia que desarrolla, a partir de nociones de base,

---

15 *Jean Kuntzmann,* Oú vont les mathematiques? Hermann, (1967) pág. 13.

teorías que no recurren sino al razonamiento lógico". Estamos ya aquí cerca de una verdadera definición formal. Por último, Bourbaki, al comenzar la introducción al Capítulo I de los Elementos de Matemática, obra que ha llegado a tener tanta influencia en la matemática de nuestro tiempo, sin dar una definición propiamente dicha, ha expresado con precisión, de la siguiente manera, lo que podemos considerar como esencial en las matemáticas en el sentido en que hoy las entendemos: "desde los griegos, quien dice matemática dice demostración; algunos llegan a dudar de que fuera de las matemáticas se pueda encontrar demostraciones en el sentido preciso y riguroso que esa palabra ha recibido de los griegos".

Sin alargar excesivamente este discurso, o sin entrar en materias que me he propuesto no tratar, no podría agregar mucho más a lo que ya he dicho en mi intento de mostrar algunos aspectos del mundo intelectual que son las matemáticas de nuestros días. Ese mundo, en general poco conocido y cuya exploración, sin embargo, es una exigencia invencible del espíritu del hombre, tan fuerte en él como todo lo que promete satisfacer nuestras insaciables ansias de verdad y de belleza, y lo que alienta la esperanza de poder sobreponernos a nuestras limitaciones para vislumbrar, siquiera sea fugazmente, las cimas anheladas donde moran los espíritus puros en eterna y perfecta felicidad.